

## 2.4.16 Grafy relací s absolutními hodnotami

**Předpoklady:** 2102, 2402, 2403, 2404, 2405, 2412, 2413

**Pedagogická poznámka:** Tato hodina nepatří do klasických středoškolských osnov. Je reakcí na fakt, že relace s absolutními hodnotami zůstaly jako reziduum starých časů v maturitních otázkách na naší škole. Nezbývá, než je studentům ukázat. V případě časového skluzu hodinu vynechávám a proberu až s maturanty těsně před maturitou.

Na druhou stranu je hodina velice hezká v tom, že si studenti mohou ověřit, že použitím pravidel, která znají, mohou vyřešit i poměrně komplikované příklady, značně odlišné od toho, co znají.

Za úspěšné považuji studenty, kteří vyřeší první čtyři příklady. Zbývající dva jsou bonbónkem pro olympioniky.

**Př. 1:** Nakresli graf relace  $L_1 = \{[x, y] \in R \times R; y \leq -|x+1|\}$ .

Požadovaná relace je podmnožinou kartézského součinu  $R \times R$ , který je zobrazen soustavou kartézských souřadnic.

Nejdříve nakreslíme graf funkce  $y = -|x+1|$ , tím získáme hraniční čáru grafu relace  $L_1$ , šrafováním pak doplníme graf o body  $\{[x, y] \in R \times R; y < -|x+1|\}$ .

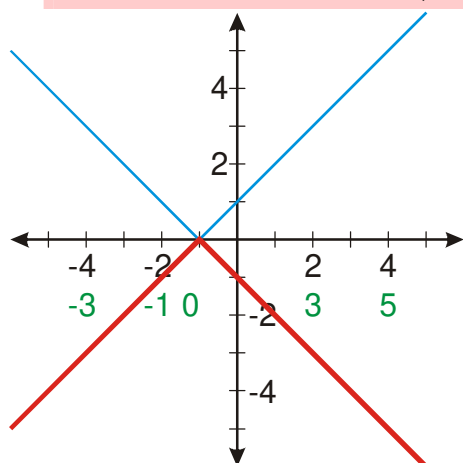
Kreslíme graf funkce  $y = -|x+1| = -f(x+1)$ . Jako  $f(x)$  použijeme funkci  $y = |x|$ .

Zvolíme  $x$ .

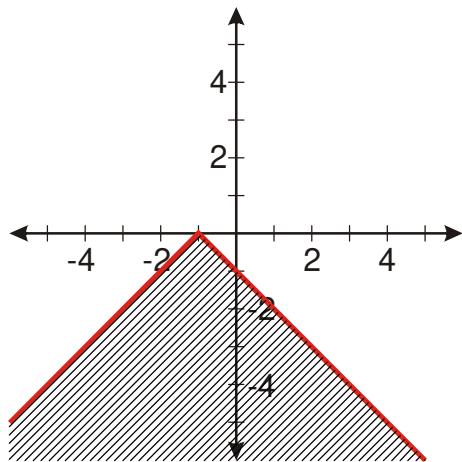
Vypočteme  $x+1$ .

Nakreslíme funkci  $y = f(x+1) = |x+1|$ .

Nakreslíme funkci  $y = -f(x+1) = -|x+1|$ .



Graf funkce  $y = -|x+1|$  zobrazuje body, pro které platí  $\{[x, y] \in R \times R; y = -|x+1|\}$ , musíme přidat ještě body  $\{[x, y] \in R \times R; y < -|x+1|\}$ , tedy body, jejichž y-ová souřadnice je menší než bodů na grafu funkce. Menší y-ová souřadnice znamená, že bod je níže  $\Rightarrow$  vyšrafovujeme oblast pod čarou grafu.



**Pedagogická poznámka:** Někteří studenti příklad vyřeší bez dalšího komentáře. Jako první nápovědu napíší na tabuli, že graf funkce  $y = -|x+1|$  můžeme napsat jako  $L_0 = \{[x, y] \in R \times R; y = -|x+1|\}$ . Druhou radou je pokyn, aby studenti nakreslili graf funkce  $y = -|x+1|$  a pak přemýšleli nad tím, jak se změní hledané body, když přidáme nerovnost.

**Př. 2:** Nakresli graf relace  $L_2 = \{[x, y] \in R \times R; y \geq |x+1| - x\}$ .

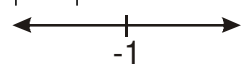
Požadovaná relace je podmnožinou kartézského součinu  $R \times R$ , který je zobrazen soustavou kartézských souřadnic.

Nejdříve nakreslíme graf funkce  $y = |x+1| - x$ , tím získáme hraniční čáru grafu relace  $L_2$ , šrafováním pak doplníme graf o body  $\{[x, y] \in R \times R; y > |x+1| - x\}$

Kreslíme graf funkce  $y = |x+1| - x$ .

Zjistíme nulový bod absolutní hodnoty:

$$|x+1|: x = -1$$



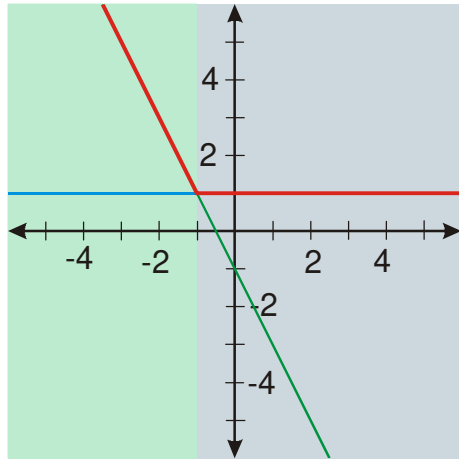
$\Rightarrow$  dva intervaly

$$1) x \in (-\infty; -1) \quad x \leq -1 \Rightarrow |x+1| = -x-1$$

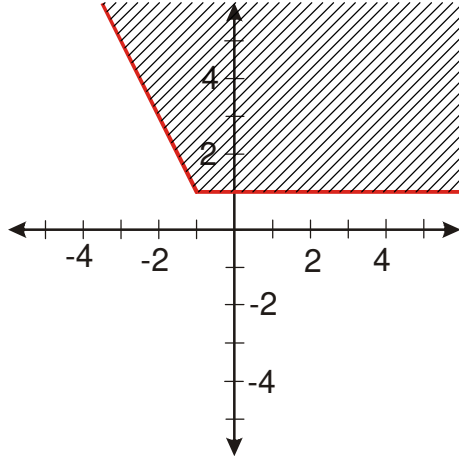
$$y = |x+1| - x = -x-1-x = -2x-1$$

$$2) x \in (-1; \infty) \quad x \geq -1 \Rightarrow |x+1| = x+1$$

$$y = |x+1| - x = x+1-x = 1$$



Graf funkce  $y = |x+1| - x$  zobrazuje body, pro které platí  $\{[x, y] \in R \times R; y = |x+1| - x\}$ , musíme přidat ještě body  $\{[x, y] \in R \times R; y > |x+1| - x\}$ , tedy body, jejichž  $y$ -ová souřadnice je větší než bodů na grafu funkce. Větší  $y$ -ová souřadnice znamená, že bod je výš  $\Rightarrow$  vyšrafujeme oblast nad čarou grafu.



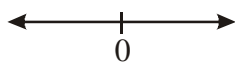
**Pedagogická poznámka:** S druhým příkladem nebývají problémy. Pokud se vyskytnou, týkají se konstrukce grafu funkce  $y = |x+1| - x$ . Takovým studentům připomínám, že neselhala logika, ale paměť.

**Př. 3:** Nakresli graf relace  $L_3 = \{[x, y] \in R \times R; |y| > |x|\}$ .

Požadovaná relace je podmnožinou kartézského součinu, který je zobrazen soustavou kartézských souřadnic.

**Problém:** Zápis relace obsahuje  $|y|$ . Graf funkce  $y = |x|$  umíme nakreslit ihned  $\Rightarrow$  odstraníme absolutní hodnotu  $y$ , abychom mohli řešit příklad ve dvou krocích.

Zjistíme nulový bod absolutní hodnoty:  $|y| : y = 0$



$\Rightarrow$  dva intervaly

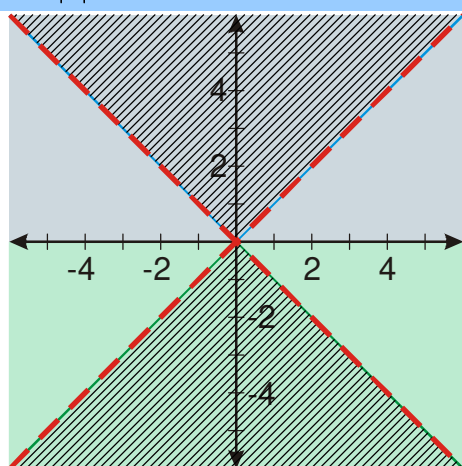
1)  $y \in (-\infty; 0)$   $y \leq 0 \Rightarrow |y| = -y$  kreslíme pod osou  $x$  (zelené pozadí)

$-y > |x| \Rightarrow y < -|x|$  vyšrafujeme oblast pod grafem ( $y$ -ová souřadnice má být menší)

2)  $y \in (0; \infty)$   $y \geq 0 \Rightarrow |y| = y$  kreslíme nad osou  $x$  (modré pozadí)

$$y > |x|$$

vyšrafujeme oblast nad grafem (y-ová souřadnice má být větší)



Grafy funkcí  $y = |x|$  a  $y = -|x|$  jsou vytaženy čárkovaně, protože jejich body do relace nepatří.

**Dodatek:** Příklad je možné řešit i z paměti:

$|x|$  je vzdálenost bodu ve směru osy  $x$  od počátku (tedy vzdálenost bodu od osy  $y$ ),

$|y|$  je vzdálenost bodu ve směru osy  $y$  od počátku (tedy vzdálenost bodu od osy  $x$ ),

$\Rightarrow |y| > |x|$  - hledáme body, které jsou od osy  $x$  vzdálené více než od osy  $y$ .

**Pedagogická poznámka:** Hodně se snažím o to, aby si studenti při odstraňování  $|y|$

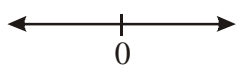
uvědomovali, že jde o naprosto stejný postup jako při odstraňování  $|x|$ .

Někteří studenti mají potíže se smířit s tím, že v horní polovině se graf chová jinak než v dolní. Doporučuji jim vzít si dva konkrétní body a ověřit si s jejich pomocí, že graf je v horní i spodní polovině vyšrafován správně.

**Př. 4:** Nakresli graf relace  $L_4 = \{[x, y] \in R \times R; |x-1| + |y| \geq 4\}$ .

Příklad vypadá složitěji než předchozí. Přepíšeme si podmínku do tvaru, který je podobnější tomu, co jsme dosud řešili:  $|x-1| + |y| \geq 4 \Rightarrow |y| \geq 4 - |x-1| \Rightarrow$  fakticky stejný příklad jako předchozí  $\Rightarrow$  odstraníme  $|y|$  stejně jako v předchozím příkladu.

Zjistíme nulový bod absolutní hodnoty:  $|y| : y = 0$



$\Rightarrow$  dva intervaly

1)  $y \in (-\infty; 0)$   $y \leq 0 \Rightarrow |y| = -y$  kreslíme pod osou  $x$  (zelené pozadí)

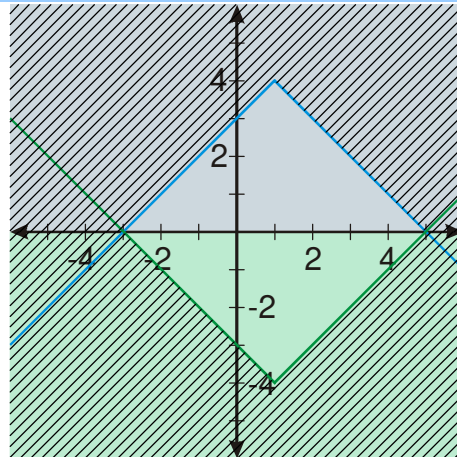
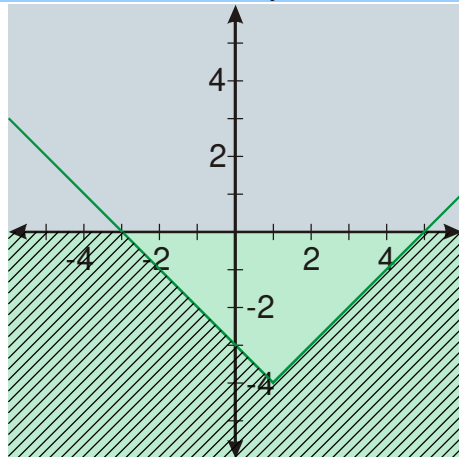
$$-y \geq 4 - |x-1| \quad / \cdot (-1)$$

$y \leq |x-1| - 4$  vyšrafujeme oblast pod grafem funkce  $y = |x-1| - 4$  (y-ová souřadnice má být menší nebo rovna)

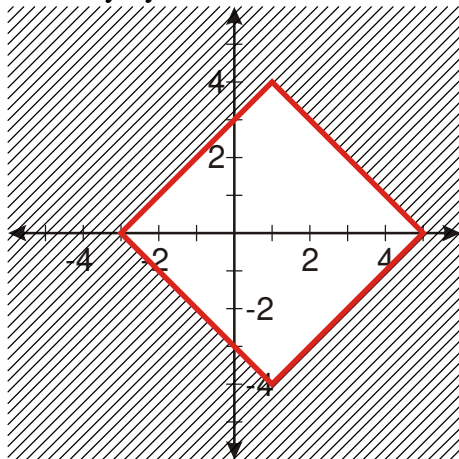
2)  $y \in \langle 0; \infty)$   $y \geq 0 \Rightarrow |y| = y$  kreslíme nad osou  $x$  (modré pozadí)

$y \geq 4 - |x-1| = -|x-1| + 4$   
 ová souřadnice má být větší)

vyšrafujeme oblast nad grafem funkce  $y = -|x-1| + 4$  (y-



Konečný výsledek:



**Př. 5:** Nakresli graf relace  $L_5 = \{[x, y] \in R \times R; |x+1| + 2|y-2| \leq 4\}$ . Ještě před začátkem řešení odhadni výsledek.

Odhad výsledku:

Srovnáme aktuální a předchozí předpis:  $|x+1| + 2|y-2| \leq 4$  a  $|x-1| + |y| \geq 4 \Rightarrow$

opět půjde o kosočtverec se středem v bodě  $[-1; 2]$ , který bude mít vyšrafovaný vnitřek.

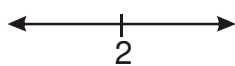
Kosočtverec bude širší než vyšší.

Přepíšeme si podmínku do tvaru, který je podobnější tomu, co jsme dosud řešili:

$$|x+1| + 2|y-2| \leq 4 \Rightarrow 2|y-2| \leq 4 - |x+1|$$

$|y-2| \leq 2 - \frac{1}{2}|x+1| \Rightarrow$  fakticky stejný příklad jako předchozí  $\Rightarrow$  odstraníme  $|y-2|$  stejně jako v předchozím příkladu  $|y|$ .

Zjistíme nulový bod absolutní hodnoty:  $|y-2|$ :  $y = 2$



$\Rightarrow$  dva intervaly

1)  $y \in (-\infty; 2)$   $y-2 \leq 0 \Rightarrow |y-2| = -y+2$  kreslíme pod přímkou  $y = 2$  (zelené pozadí)

$$-y + 2 \leq 2 - \frac{1}{2}|x + 1|$$

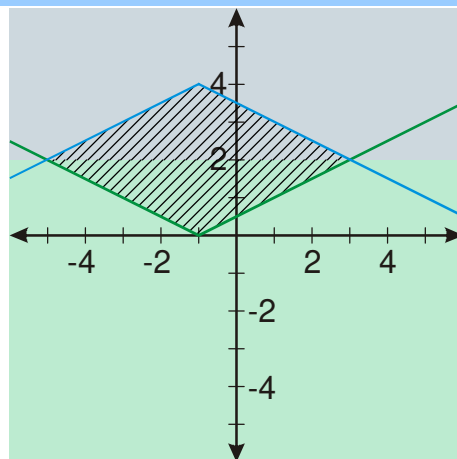
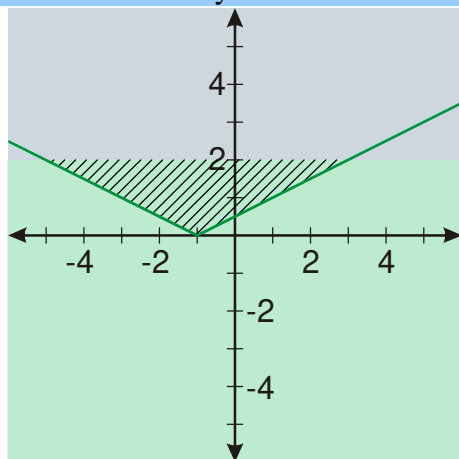
$$-y \leq -\frac{1}{2}|x + 1| \quad / \cdot (-1)$$

$y \geq \frac{1}{2}|x + 1|$       vyšrafujeme oblast nad grafem funkce  $y = \frac{1}{2}|x + 1|$  (y-ová souřadnice má být větší nebo rovna)

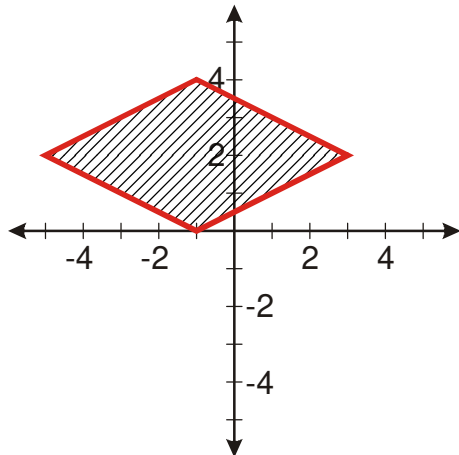
2)  $y \in \langle 2; \infty \rangle$      $y - 2 \geq 0 \Rightarrow |y - 2| = y - 2$     kreslíme nad přímkou  $y = 2$  (modré pozadí)

$$y - 2 \leq 2 - \frac{1}{2}|x + 1|$$

$y \leq 4 - \frac{1}{2}|x + 1|$       vyšrafujeme oblast pod grafem funkce  $y = 4 - \frac{1}{2}|x + 1|$  (y-ová souřadnice má být menší nebo rovna)



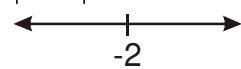
Konečný výsledek:

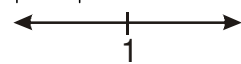


**Př. 6:** Nakresli graf relace  $L_6 = \{[x, y] \in R \times R; |y - 1| + y + |x + 2| - 2x - 7 \geq 0\}$ .

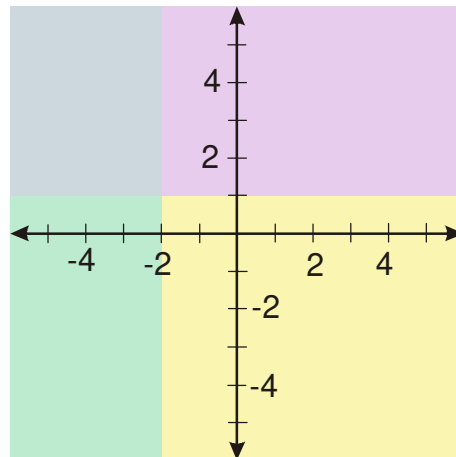
Předpis obsahuje absolutní hodnotu s  $x$  i  $y$ , stejně tak obě neznámé mimo absolutní hodnotu  $\Rightarrow$  musíme rozdělit intervaly u obou proměnných.

Zjistíme nulové body absolutních hodnot:

$$|x+2|: x = -2$$


$$|y-1|: y = 1$$


$\Rightarrow$  čtyři kombinace  $\Rightarrow$   
plocha grafu se rozpadne na čtyři části

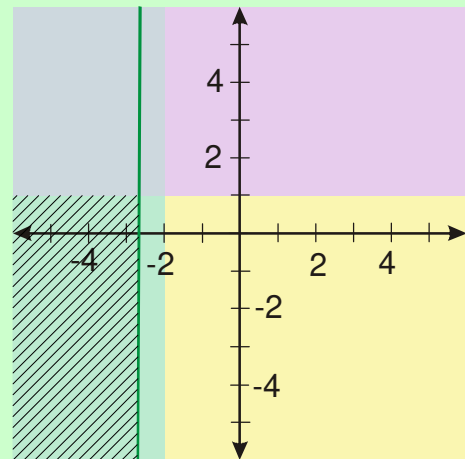


**1)**  $x \in (-\infty; -2) \wedge y \in (-\infty; 1)$        $x \leq -2 \Rightarrow |x+2| = -x-2$        $y \leq 1 \Rightarrow |y-1| = -y+1$

$$|y-1| + y + |x+2| - 2x - 7 = -y+1 + y - x - 2 - 2x - 7 \geq 0$$

$$-8 \geq 3x$$

$$x \leq -\frac{8}{3}$$



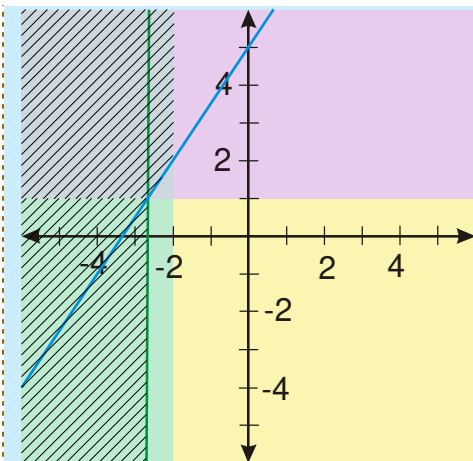
**2)**  $x \in (-\infty; -2) \wedge y \in (1; \infty)$        $x \leq -2 \Rightarrow |x+2| = -x-2$        $y \geq 1 \Rightarrow |y-1| = y-1$

$$|y-1| + y + |x+2| - 2x - 7 = y-1 + y - x - 2 - 2x - 7 \geq 0$$

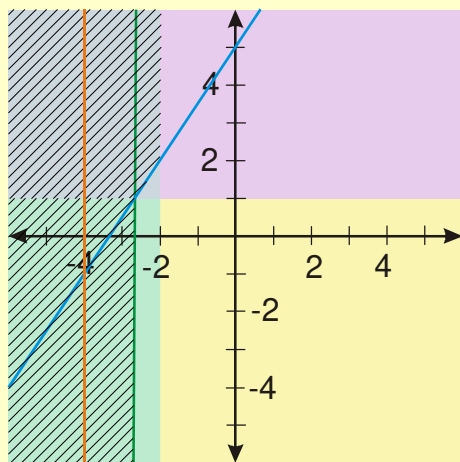
$$2y - 3x - 10 \geq 0$$

$$2y \geq 3x + 10$$

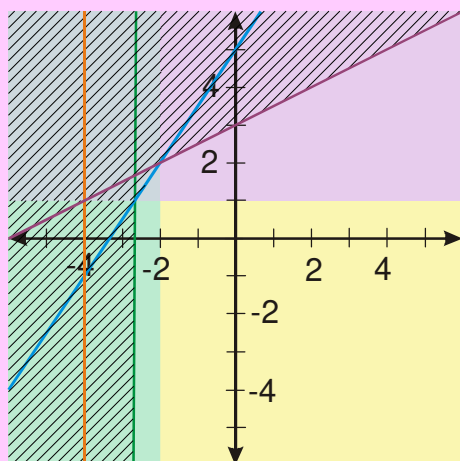
$$y \geq \frac{3}{2}x + 5$$



3)  $x \in \langle -2; \infty \rangle \wedge y \in (-\infty; 1)$        $x \geq -2 \Rightarrow |x+2| = x+2$        $y \leq 1 \Rightarrow |y-1| = -y+1$   
 $|y-1| + y + |x+2| - 2x - 7 = -y+1 + y + x+2 - 2x - 7 \geq 0$   
 $-x - 4 \geq 0$   
 $x \leq -4$

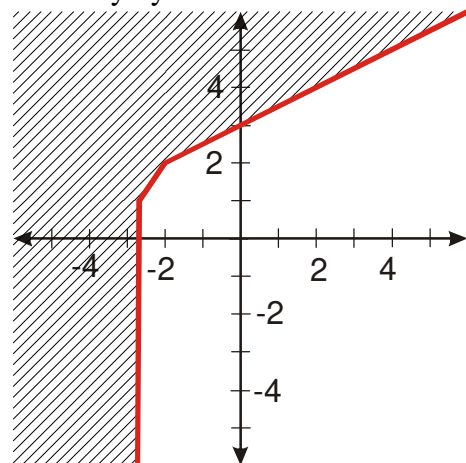


4)  $x \in \langle -2; \infty \rangle \wedge y \in \langle 1; \infty \rangle$        $x \geq -2 \Rightarrow |x+2| = x+2$        $y \geq 1 \Rightarrow |y-1| = y-1$   
 $|y-1| + y + |x+2| - 2x - 7 = y-1 + y + x+2 - 2x - 7 \geq 0$   
 $2y - x - 6 \geq 0$   
 $2y \geq x + 6$   
 $y \geq \frac{x}{2} + 3$





Konečný výsledek:



**Shrnutí:** Pokud umíme nakreslit grafy funkcí, je možné kreslit i grafy relací, které se pomocí funkcí vyjadřují.